~ 44 σελ-...

Διάλεξη 18η

17/12/2018

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Γραμμικά Συστήματα με Σ.Σ. (Μέθοδος Απαλοιφής):

Π.χ.: $y_1' = y_1 + 12y_2$, $y_2' = 3y_1 + y_2$ || $y_1'' = y_1' + 12y_2'$, $y_2' = 3y_1 + y_2$ || $y_1'' = (y_1 + 12y_2) + 12(3y_1 + y_2)$, $y_2' = 3y_1 + y_2$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} y_1'' = 37y_1 + 24y_2 \\ y_2' = 3y_1 + y_2 \end{array}$$

Από τις εξισώσεις: $\left.\begin{array}{l} y_1' = y_1 + 12y_2 \\ y_1'' = 37y_1 + 24y_2 \end{array}\right\}$ προκύπτει η εξής

εξίσωση: $\boxed{y_1'' - 2y_1' - 35y_1 = 0}$

Λύνοντας το πολ/μο $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 35$

$\lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 7$

και έτσι $y_1 = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{7x}$.

Π.χ.: $y_1' = 2y_1 + y_2 + 3y_3 \to y_1' - 2y_1 = y_2 + 3y_3$

$y_2' = 2y_2 - y_3 \to y_2' - 2y_2 = -c_3 e^{2x}$

$y_3' = 2y_3 \to y_3 = c_3 e^{2x}$

Π.χ.: $\boxed{y_1' = y_1 - y_2 - y_3}$

$y_2' = y_1 + 3y_2 + y_3$

$y_3' = -3y_1 + y_2 - y_3$

$\to y_1'' = y_1' - y_2' - y_3' =$

$= (y_1 - y_2 - y_3) - (y_1 + 3y_2 + y_3) - (-3y_1 + y_2 - y_3)$

$\boxed{y_1'' = 3y_1 - 5y_2 - y_3}$

$y_1''' = 3y_1' - 5y_2' - y_3' = 3(y_1 - y_2 - y_3) - 5(y_1 + 3y_2 + y_3) - (-3y_1 + y_2 - y_3)$

$\Rightarrow \boxed{y_1''' = y_1 - 19y_2 - 7y_3}$

και

Έτσι προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3 & : A \\ y_1'' = 3y_1 - 5y_2 - y_3 & : B \\ y_1''' = y_1 - 12y_2 - 7y_3 & : \Gamma \end{cases}$$

$B - A$: $y_1'' - y_1' = 2y_1 - 4y_2$: Δ

$\Gamma - 7A$: $y_1''' - 7y_1' = -6y_1 - 12y_2$: E

$E - 3\Delta$: $\underbrace{y_1''' - 3y_1'' - 4y_1' + 12y_1 = 0}$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = P(\lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda^2(\lambda-3) - 4(\lambda-3) = (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda+2)$$

και έτσι $\boxed{y_1(x) = c_1 e^{3x} + c_2 \cdot e^{2x} + c_3 e^{-3x}}$

<u>Π.χ.</u>: $y_1' = 3y_1 + y_2 - y_3 \overset{\text{παραγ.}}{\Longrightarrow} y_1'' = 3y_1' + y_2' - y_3'$

$y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3$

$y_3' = 3y_1 + 3y_2 - y_3$

$$= 3(3y_1 + y_2 - y_3) + (y_1 + 3y_2 - y_3) - (3y_1 + 3y_2 - y_3)$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1'' = 7y_1 + 3y_2 - 3y_3}$$

Από την εξίσωση: $y_1' = 3y_1 + y_2 - y_3$

και την: $y_1'' = 7y_1 + 3y_2 - 3y_3$

αν αφαιρέσω κατά μέλη προκύπτει: $y_1'' - 3y_1' = -2y_1$

$$\Rightarrow \boxed{y_1 = -\frac{y_1''}{2} + \frac{3}{2} y_1'}$$

Άσκηση 31)

$$y_1' = y_1 + y_2 + e^x \xrightarrow{\text{παραγ.}} y_1'' = y_1' + y_2' + e^x$$
$$y_2' = y_1 - y_2 - e^x \qquad\qquad = (y_1+y_2+e^x) + (y_1-y_2-e^x) + e^x$$

$$\rightsquigarrow y_1'' = 2y_1 + e^x$$
$$y_1'' - 2y_1 = e^x \Rightarrow \boxed{y_1 = y_1''/2 - e^x/2}$$

και από την σχέση $y_1' = y_1 + y_2 + e^x \Rightarrow \boxed{y_2 = y_1' - y_1 - e^x}$

κ.ο.κ.

~o~o~o~o~o~o~o~o

▶ (E_2): $a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$ ⎫ επίλυση με δυναμοσειρές
$a_2(x) \neq 0,\ x \in I,\ a_1, a_0, a_2 \in C(I)$ ⎭

↓

Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, $\underbrace{r>0}_{x \in (x_0-r,\, x_0+r)}$

Παραγωγίζω και προκύπτει ότι $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [\ \ldots\ ]'$

(*) Έστω ότι έχω την σειρά:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = (a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots)'$$ (οι δυναμοσ. είναι συνεχείς)

$$= a_1 + a_2 \cdot 2(x-x_0) + a_3 \cdot 3(x-x_0) + \ldots + n\, a_n (x-x_0)^{n-1} + \ldots$$

ΛΑΘΟΣ! → Όταν υπάρχει σταθερός όρος (όπως παρατηρώ που $\exists$ το a_0) τότε όταν πάω να παραγωγίσω θα αυξήσω το n κατά 1. Δηλαδή όταν παραγωγίσω θα πάρω $\sum_{n=1}^{\infty} \ldots\ldots$ (ΜΟΝΟ ΟΤΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΤΑΘΕΡΟΣ ΟΡΟΣ) αν όμως υπάρχει η εξής σύμβαση: $\exists$ σταθ. όρος a_0 αλλά ισούται με μηδέν. Τότε ΔΕΝ αυξάνω κατά 1.